基于 L_1 范数的形状快速匹配算法 *

王江辉，吴小俊

(江南大学 物联网工程学院，江苏 无锡 214122)

摘　要：针对内距离形状上下文 IDSC（inner-distance shape context）和轮廓点分布直方图 CPDH（contours points distribution histogram）在形状相似性度量中直方图匹配耗时长，工程应用性不佳的问题，提出了一种用 EMD-L_1 测量轮廓特征直方图的距离的方法。EMD-L_1 在原始 EMD (earth mover's distance)的基础上融合了 L_1 范数，通过替换地面距离计算方法，减少了目标函数的变量，加快了直方图匹配的速度，能够快速实现形状匹配并保持较好的检索性能。对形状数据集进行仿真实验的结果证明，该方法能够有效地进行数据集的形状识别和检索，并且在 MNIST 数据集下的匹配速度优于其他算法。

关键词：内距离形状上下文；轮廓点分布直方图；地球移动距离（EMD）；L_1 范数；形状检索

中图分类号：TP391.4　　doi: 10.3969/j.issn.1001-3695.2017.08.0893

Fast shape retrieval based on L_1 norm

Wang Jianghui, Wu Xiaojun

(*School of IoT Engineering*, *Jiangnan University*, *Wuxi Jiangsu* 214122, *China*)

Abstract; In order to solve the problem that the histogram matching time is long and the engineering application is poor. This paper proposed to use EMD-L_1 to measure the distance between two feature histograms. EMD-L_1 fusion of the L_1 norm and the original Earth Mover's Distance (EMD) and replace the calculation of the ground distance. The algorithm reduce the number of unknown variables, could achieve shape matching quickly and has a good retrieval performance. With a great deal of experiments in several shape databases, the results show that the performance of novel method are superior to original algorithm. And the matching speed is better than other algorithms under the MNIST data set.

Key Words: inner-distance shape context(IDSC); contour points distribution histogram(CPDH); earth mover's distance(EMD); L_1 norm; shape retrieval

0　引言

形状是物体的一项重要特征，相比纹理、灰度等外观特征，形状具有更深层次的视觉信息[1-2]。形状的匹配应用于计算机视觉的许多领域，如目标识别，图像检索等都可以利用形状作为分类与识别的一项依据。其中形状检索又可以分为 2D 形状与 3D 形状检索，因为最近几年深度学习发展迅速得到了众多学者的青睐。提出了大量基于深度学习的 3D 形状检索算法[3,4]。但是 2D 形状检索依旧是计算机视觉中的代表性问题。二维形状匹配的过程主要可以分为两部分：首先设计一种形状描述子，即通过某种方式来描述和表示形状；然后计算不同形状的描述子间的距离来衡量形状间的差异完成匹配。该方法主要分为基于形状组成点集、形状边界轮廓和形状内部骨架 3 类来描述形状特征。轮廓相比点集增加了点的顺序信息，骨架则包含了形状的几何特征和拓扑结构[5]。基于轮廓的方法有多尺度法，如多尺度三角形面积（triangle-area representation, TAR）[6]、多尺度凹凸性（multiscale convexity，MCC）[7]、多尺度积分不变量[8]等。这类方法通过构建多个尺度下的形状特征来拓展特征信息。形状上下文[9]（shape context，SC）是基于轮廓点相对位置关系的经典方法，该算法注重轮廓中某个点与其他所有点的空间分布关系，但是其方法抗噪能力差，采用薄板样条函数（TPS）计算直方图距离耗时长。

Ling 在 SC 的基础上用轮廓点的内部距离代替欧氏距离来衡量轮廓点的差异，提出了内距离形状上下文（inner-distance shape context, IDSC）[10]方法。该方法对非刚性物体轮廓的形状描述具有良好的表示，并采用动态规划算法度量目标形状之间的距离。但是其计算复杂度高，实用性不佳。

Shu 和 Wu[11]提出了一种 2 维形状描述符——轮廓点分布直方图（contours points distribution histogram，CPDH）。CPDH

基金项目：国家自然科学基金资助项目（61373055, 61672265）；江苏省教育厅科技成果产业化推进项目（JH10-28）；江苏省产学研创新项目（BY2012059）
作者简介：王江辉（1992-），男，浙江湖州人，硕士研究生，主要研究方向为计算机视觉、模式识别、基于内容的形状检索（Wjh975829659@163.com）；吴小俊（1967-），男，教授，博导，主要研究方向为计算机视觉、模式识别与人工智能.

以目标形状的最小外接圆为特征提取区域，以轮廓特征点分布为统计对象，以外接圆圆心为原点建立极坐标下的轮廓点分布直方图。CPDH 用地球移动距离（Earth Mover's Distance，EMD）度量直方图之间的距离。但是 CPDH 侧重于轮廓局部特征描述导致其在形变较大的形状数据集下性能不佳，检索不稳定且 EMD 算法时间复杂度高，在形状匹配时速度过慢。

本文提出用 EMD-L_1 度量[12]由轮廓描述子生成的两幅形状轮廓特征直方图的相似度，EMD-L_1 在原始 EMD[9]基础上利用 L_1 范数（曼哈顿距离）作为一种新的地面距离。改进后的 EMD-L_1 通过减少函数的变量和约束条件，降低了计算复杂度，加快了形状匹配速度，而且并没有弱化形状描述子的鉴别能力。除此之外 L_1 范数在特征提取中也有去噪，减少异常值的优点，可使形状描述子更具鲁棒性通过在各数据集下检索效果的实验分析，该改进算法有效地保持了 IDSC 和 CPDH 在良好的检索性能，提高了匹配速度，增强了工程应用型。

1　CPDH 与 IDSC 算法基本原理

轮廓特征是图像最本质的特征，CPDH 是基于轮廓点分布的基础上提出的一种目标特征描述符。IDSC 是基于采样点之间的空间分布关系且在内距离的基础上提出的一种具有良好表示的形状描述符。

1.1　构建 CPDH 描述符

首先采用标准的 Canny 算子对图像目标轮廓进行提取,但由于目标形状轮廓的点数过多,为了减少计算量满足实时性的要求,采用等间隔距离方法对轮廓点进行采样,得到轮廓的部分点集。 $P=\{p_1,p_2,p_3,...,p_n\},p\in IR^2$ 式中，n 表示点的数量，来描述物体的形状,如图 1 所示。图中，(a)为初始图像;(c)提取的采样点轮廓图像; (d)为目标形状的最小外接圆图像。

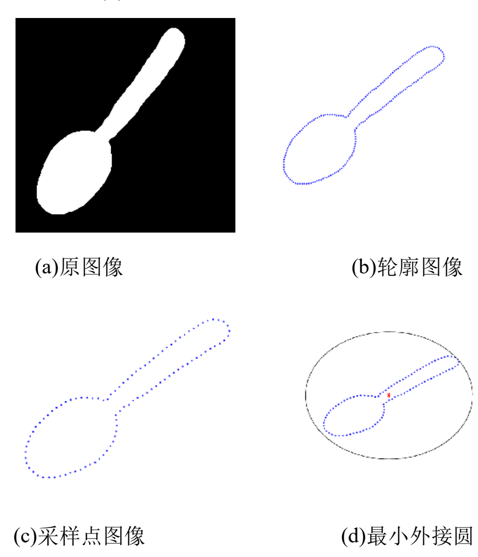


图 1　轮廓提取效果图

以轮廓点集 P 为目标区域建立其最小外接圆 C,以圆心 (Cx, Cy) 为原点建立极坐标系统,在该最小外接圆内以同心圆方式建立如图 2 所示扇形网格模型来统计轮廓点的分布特征。对每一个扇形区域 R_i，得到三元组 $H_i=\{\rho_i,\theta_i,n_i\}$ 其中: ρ_i 为第 i 个同心圆的半径，θ_i 为区域 R_i 的一条扇形边与水平方向(顺时针旋转)所成夹角，n_i 为落在区域 R_i 中的点的个数。这样一幅图像 I 就可以描述成 R 个三元组所构成的直方图 H。CPDH 具体描述细节参考文献[7].

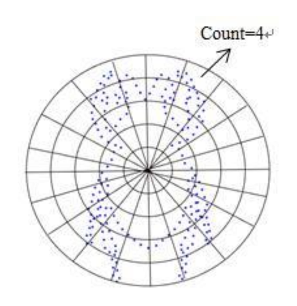
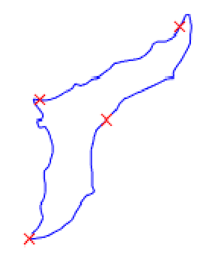


图 2　极坐标下轮廓点分布

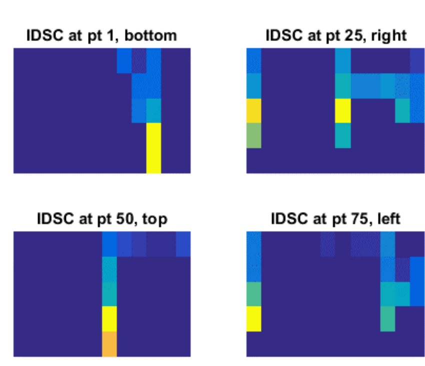
1.2　IDSC 形状描述符

首先利用二阶梯度 Canny 算子提取目标形状的部分轮廓点集 $Q=\{q_1,q_2,q_3,...,q_n\},q\in IR^2$，$n$ 表示采样点数量。对于任意采样点都可以用其余 n-1 个点和该点构造的向量表示。因此整个目标形状就可以用 n*n-1 个向量表示。这些向量包含了轮廓点在整个形状中的距离信息和方向信息。方向参数表示把一个圆周等分份数；距离参数是等分半径数。然后用形状统计直方图表示得到的向量集。

内距离定义为形状 A 内部连接两点 m,n 的最短路径长度，用 $d(\mathrm{m,n;A})$ 来表示。最短路径一般存在两种情况：若点 m，n 之间的线段完全位于目标形状之间，则内距离等价于欧氏距离；否则应用 Floyed-Warshall 最短路径算法来计算每一对采样点之间的距离。结合上述部分，可得到目标形状的 IDSC。如图 3 所示，图 3.(a)表示提取的蝙蝠形状轮廓并标记了 4 个轮廓点，图 3.(b)分别表示相应的内距离形状上下文特征。



(a) 形状轮廓标记点



(b)标记点对应的直方图

图 3　形状轮廓和统计直方图

2 EMD 算法

相似性度量是直接影响检索效果的重要环节，人们一直致力于研究如何用数值来有效地表示图像在特征上的相似程度。Rubner 等人[13]提出的 EMD 算法广泛应用于线性规划中的运输问题。直觉地，本文将两幅进行比较的图像看做是图像特征在空域的两个不同分布，一个看做是空间散布的土堆，另一个看做是土坑，EMD 算法就是找一个最佳路径来完成土堆的运输问题，在该最佳路径下所做的功可看做是两个分布间的距离。该算法可详细地形式化如下的线性规划问题：

设空间 S 分布着 m 个土堆 $P=\{(p_1,w_{p1}),\cdots,(p_m,w_{pm})\}$ ，第 p_i 个土堆的质量为 w_{p_i} ，同时分布着 n 个土坑 $Q=\{(q_1,w_{q_1}),\cdots,(q_n,w_{q_n})\}$，第 q_i 个土坑能容纳土的质量为 w_{q_i} ，$D=[d_{ij}]$ 表示地面距离矩阵。需要找到最佳运输方案 $F=[f_{ij}]$，这里 f_{ij} 表示从土堆 p_i 运输到土坑 q_i 的土的质量。运土的最小功可定义为

$$Work(P,Q,F)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}d_{ij}f_{ij} \tag{1}$$

该式需满足以下四个限制条件：

$$f_{ij}>0 \quad 1\le i\le m,1\le j\le n \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n}f_{ij}\le w_{p_i} \quad 1\le i\le m \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n}f_{ij}\le w_{q_i} \quad 1\le j\le n \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}f_{ij}=\min\left(\sum_{i=1}^{m}w_{p_i},\sum_{j=1}^{n}w_{q_i}\right) \tag{5}$$

条件 1 限定只能把土从土堆集 P 运倒土坑集 Q，反之不然；条件 2 限定土堆 p_i 最多所能运输的图的质量不超过 w_{p_i} ；条件 3 限定土坑 q_j 最多所能承载的土地质量不超过 w_{q_i} ;条件 4 表示尽可能多的运输土。只要该运输问题得到解决，就找到了最佳运输方案 F，EMD 距离可采用最终归一化的形式：

$$EMD(P,Q)=\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}d_{ij}f_{ij}}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}f_{ij}} \tag{6}$$

3 EMD-L1 度量

CPDH 采用原始 EMD 度量轮廓特征直方图相似度，但它存在计算复杂度高，对微小形变鲁棒性较弱的缺点。IDSC 采用卡方检验计算形状直方图的相似度得到代价矩阵，再用动态规划算法(dynamic programming algorithm，DP)得出代价矩阵中最优匹配。虽然上述两种度量算法匹配精度高但是计算时间太长不利于工程应用。针对这一不足，本文采用 EMD-L1 作为度量准则。EMD-L1 算法核心在于用 L1 范数（曼哈顿距离）替代了原始 EMD 的地面距离。L1 范数（曼哈顿距离）是指向量中各个元素的绝对值之和，因此新定义的地面距离如式(7)所示。通过利用 L1 范数取代原始地面距离的计算方式降低了目标函数的变量个数，加快了直方图的匹配速度，由于 L1 范数对噪声，异常值的鲁棒性优于 L2 范数所以选取 L1 范数。

$$d_{i,j;k,l}=|i-k|+|j-l| \tag{7}$$

其中：(i,j）;(k,l)分别是目标形状对应轮廓特征直方图下的块。

给定两个由 CPDH 生成的 m 行 n 列二维直方图 P，Q，分别有 N 个块， $N=m\times n$，作如下的定义：

a)定义直方图块的索引集：

$\eta=\{(i,j):1\le i\le m,1\le j\le n\}$,(i,j)表示直方图中的一个块

b)定义块之间流的集合： $\nu=\{(i,j,k,l):(i,j)\in\upsilon,(k,l)\in\nu\}$

c)由 a）可得，直方图 P，Q 的定义： $P=\{p_{ij}:(i,j)\in\eta\}$ ，$Q=\{q_{ij}:(i,j)\in\eta\}$

根据上述三个定义，重新定义直方图 P 和 Q 间的 EMD ：

$$EMD(P,Q)=\min_{F=\{f_{i,j;k,l}:(i,j,k,l)\in\nu\}}\sum_{\eta}f_{i,j;k,l}d_{i,j;k,l} \tag{8}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}f_{i,j;k,l}\ge 0 & \forall(i,j,k,l)\in\nu\\ \sum_{(i,j)\in\eta}f_{i,j;k,l}=q_{kl} & \forall(k,l)\in\eta\\ \sum_{(k,l)\in\eta}f_{i,j;k,l}=p_{ij} & \forall(i,j)\in\eta\end{cases} \tag{9}$$

F 表示直方图 P 到 Q 的流； $f_{i,j;k,l}$ 表示块（i,j）到（k,l）的流；地面距离 $d_{i,j;k,l}$ 用式(7)计算即可。

为了进一步优化目标函数，将 ν 划分成三个子集 $\nu=\nu_0\cup\nu_1\cup\nu_2$，每一个子集对应一种情形下的流：

$\nu_0=\{(i,j,i,j):(i,j)\in\nu\}$ 表示在直方图同一位置块的流,命名为 s-flows

$\nu_1=\{(i,j,k,l):(i,j,k,l)\in\nu,d_{i,j,k,l}=1\}$ 表示直方图中相邻两个块的流,命名为 n-flows

$\nu_2=\{(i,j,k,l):(i,j,k,l)\in\nu,d_{i,j,k,l}>1\}$ 是除上述两种情况剩下的流,命名为 f-flows

根据以上定义，可以将 f-flow 划分成若干个 n-flow。这是因为在整数直方图块上 L1 距离可以形成一个最短路径系统。例如，给定一个 f-flow $f_{i,j;k,l},i\le k,j\le l$ ，L1 地面距离可以有如下分解：

$$d_{i,j;k,l}=d_{i,j;i,l}+d_{i,l;k,l}=\sum_{j\le x<l}d_{i,x;i,x+1}+\sum_{i\le y<k}d_{y,l;y+1,l} \tag{10}$$

综上所述，目标形状 P 与查询形状 Q 对应 CPDH 下的轮廓直方图 EMD-L1 距离为：

$$EMD-L_1(P,Q)=\min_{G=\{g_{i,j;k,l}:(i,j,k,l)\in\nu_1\}}\sum_{\nu_1}g_{i,j;k,l} \tag{11}$$

$$s.t.\begin{cases}g_{i,j;k,l}\ge 0 & \forall(i,j,k,l)\in\nu_1\\ \sum k,l:(i,j,k,l)\in\nu_1\left(g_{i,j;k,l}-g_{k,l;i,j}\right)=b_{ij} & \forall(i,j)\in\eta\end{cases} \tag{12}$$

其中：$b_{ij}=p_{ij}-q_{ij}$ 表示两个直方图在块（i，j）的轮廓点数差异。目标函数 11 和约束条件 12 与原始 EMD 相比，变量数与约束条件减少。另外根据 L_1 距离的特性也不用再计算块与块之间的地面距离，很大程度降低了算法的计算复杂度。

4　算法时间复杂度分析

改进算法中的优化问题将目标函数的变量数由 $O(N^2)$减到 O(N),N 表示外接圆划分的块数。EMD-L1 利用 L1 范数计算地面距离，大大地提升了直方图匹配速度。原始的 EMD 算法复杂度为 $O(N^3 \log N)$,而优化后的算法复杂度为 O(N),通过实验验证改进算法的形状匹配速度得到了有效提高。

5　实验结果与分析

为验证本文所提方法的有效性，在不同数据集下进行实验分析。实验过程中，分别将数据集中每一样本视为查询形状，余下样本视为目标形状，将得到的形状距离结果按照升序排列。如果匹配结果显示查询形状与目标形状属于相同类别，则匹配结果正确；否则，匹配错误。

5.1　Kimia-25 与 Kimia-99 形状数据集

Kimia-25 数据库[14]中包含 6 个类别共 25 个样本，样本示例如图 4(a)所示。Kimia-99 数据库[15]包含 9 个类别各 11 个样本，样本实例如图 4.(b)所示。

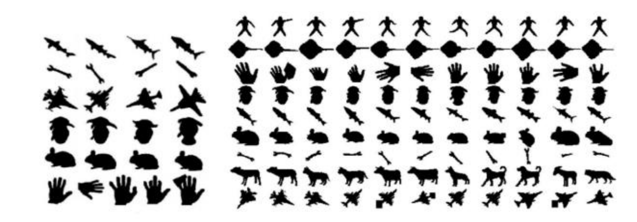
在本文的所有实验中，为确保与其他方法比较时的公平性，设置各形状轮廓的采样点数目均为 N＝100。在 Kimia-25 数据库和 Kimia-99 数据库的测试过程中，目标形状最小外接圆圆周 12 等分，圆心角半径 5 等分，即 $5\rho\times12\theta=60$ 个区域块。

在 Kimia-25 数据库进行仿真实验的结果见表 1，表 1 列出了不同方法在 Kimia-25 数据集下的检索结果，给出了与查询形状最相似的 1~3 组目标形状中分类正确的具体数目。从表 1 的结果中可以看出，本文所改进的 IDSC 与 CPDH 效果略优于经典方法 SC，主要原因在于 SC 在构建每个轮廓点的局部直方图时，若半径过短，则局部直方图不具备良好的鉴别能力；若半径过长，则局部直方图会包含较多的噪声。但是所提算法检索效果弱于 CPDH+EMD，与 IDSC+DP。经分析 L_1 距离替代原始 EMD 地面距离时忽略了轮廓点之间的空间信息，导致检索效果略有下降。

在 Kimia-99 数据库进行仿真实验的结果见表 2，表 2 分别给出了与查询形状最相似的 1~10 组目标形状分类正确的具体数目及合计结果。从表中可以发现，本文算法检索性能优于 SC，改进的 CPDH 算法弱于 CPDH+EMD。但是检索到数据集第 8 类至第 10 类时，本文算法比另外两种算法更加稳定，返回有效的形状数目更多。原因在于采取 L_1 距离对微小形变的鲁棒性更好。另外改进后的 IDSC 算法检索性能明显优于 SC，CPDH+EMD。证明 EMD-L1 能很好的保持 IDSC 对形状的描述能力。

表 1　Kimia-25 数据库在不同方法下的检索结果比较

方法	1st	2nd	3rd
SC[9]	23	21	20
CPDH+EMD[11]	25	24	22
Sharvit et. al[14]	23	21	20
IDSC+DP[12]	25	24	25
CPDH+EMD-L_1	25	22	20
IDSC+EMD-L1	25	24	24



(a)Kimia-25 形状数据集　　(b) Kimia-99 形状数据集

图 4　两组形状数据集剪影

表 2　Kimia-99 数据库在不同方法下的检索结果比较

方法	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	8th	9th	10th	全部
SC[9]	97	91	88	85	84	77	75	66	56	37	756
CPDH+EMD[11]	96	94	94	87	88	82	80	70	65	22	808
IDSC+EMD-L1	99	99	98	98	96	90	85	82	76	67	893
CPDH+EMD-L_1	99	91	85	85	79	80	73	78	68	53	791

5.2　Articulated 形状数据集

Articulated 数据集[10]包含 8 个类，总共 40 张图片。每个类的 5 张图片都有不同程度的形变，如图 6 所示。该数据集被用于测试形状的铰接，这是形变中一个较为特殊的情况。同时也可以检验算法对形变的鲁棒性。该实验采用交叉验证，分别用卡方检验 χ^2，EMD-L_1 度量同一形状描述子生成的直方图之间的相似度。将返回与查询形状最相似的 1~4 组目标形状且分类正确的具体数目作为评价算法检索性能的标准。分析表 3 的实验数据，第一组与第二组实验结果相比，说明 EMD-L_1 比 χ^2 在形变较明显的数据集下的检索效果更好，鲁棒性更加；分析第二组与第三组的实验结果，IDSC 对形状的鉴别能力优于 SC，分析第一组和第五组实验，可以看出 CPDH 对形状形变的描述能力更优于 SC 因为 IDSC 对形状的描述中包含了轮廓点的相对位置关系且 SC 算法抗噪性能差。

5.3　MPEG-7 数据集

根据本文提出的算法，选用 MPEG-7[16]数据集进行仿真实验，该数据集共有 1400 个形状剪影，均分为 70 个类别，每个类别中共有 20 个样本。

5.3.1 CPDH+EMD 与 CPDH+EMD-L1 的比较

表 4 给出了 CPDH+EMD, CPDH+EMD-L_1 算法的比较，本次实验在 MPEG-7 Set B 的子图像库中进行，该子库包括 216 幅形状图像，分为 18 个类别，每类 12 幅。从表 4 的实验结果可以看出，虽然 CPDH+EMD 返回的有效形状总数多于 CPDH+EMD-L_1，但是分析第 8 类到第 11 类的检索结果，尤其是第 10 类至第 11 类 EMD 返回的形状数量下降较快而 EMD-

L_1 则平稳减少且第 11 类的返回数目远多于原始算法，说明基于 EMD-L_1 的 CPDH 在类数较多的情况下对形变的鲁棒性更优，但是由于 L_1 范数的特性忽略了轮廓点之间的空间信息导致总体效果不如原算法。

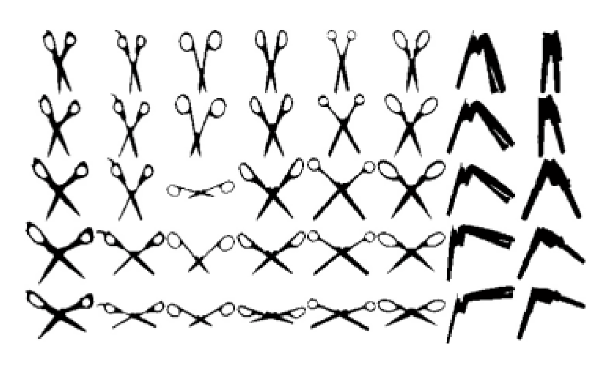


图 5　Articulated 形状数据集

表 3　Articulated 形状数据集在不同方法下的检索结果比较

方法	Top1	Top2	Top3	Top4
SC+EMD-L1	36/40	19/40	10/40	8/40
SC+χ^2[9]	20/40	10/40	11/40	5/40
IDSC+χ^2	40/40	34/40	35/40	27/40
IDSC+EMD-L1	39/40	3940	34/40	32/40
CPDH+EMD-L_1	40/40	12/40	14/40	10/40

表 4　MPEG-7 子库中的检索结果比较

方法	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	8th	9th	10th	11th	总数
CPDH+EMD[11]	214	215	209	204	200	193	187	180	168	146	114	2030
CPDH+EMD-L_1	216	206	199	185	186	178	176	167	154	144	135	1946

5.3.2 IDSC+EMD-L1 与其他方法的比较

本实验采用 MPEG-7 数据集并使用 Bull-eye[17]方法确定检索精度：每个待检索形状都要与数据集中所有形状比较，取实验结果中与每个待检索形状最相似的 40 个形状，统计这 40 个形状中与待检索形状同类别的数目，并计算对应的查全率。从表 5 可以看出 EMD-L1 提升了 IDSC 的检索性能且超过了大多数形状检索算法。证明了本文算法的有效性。

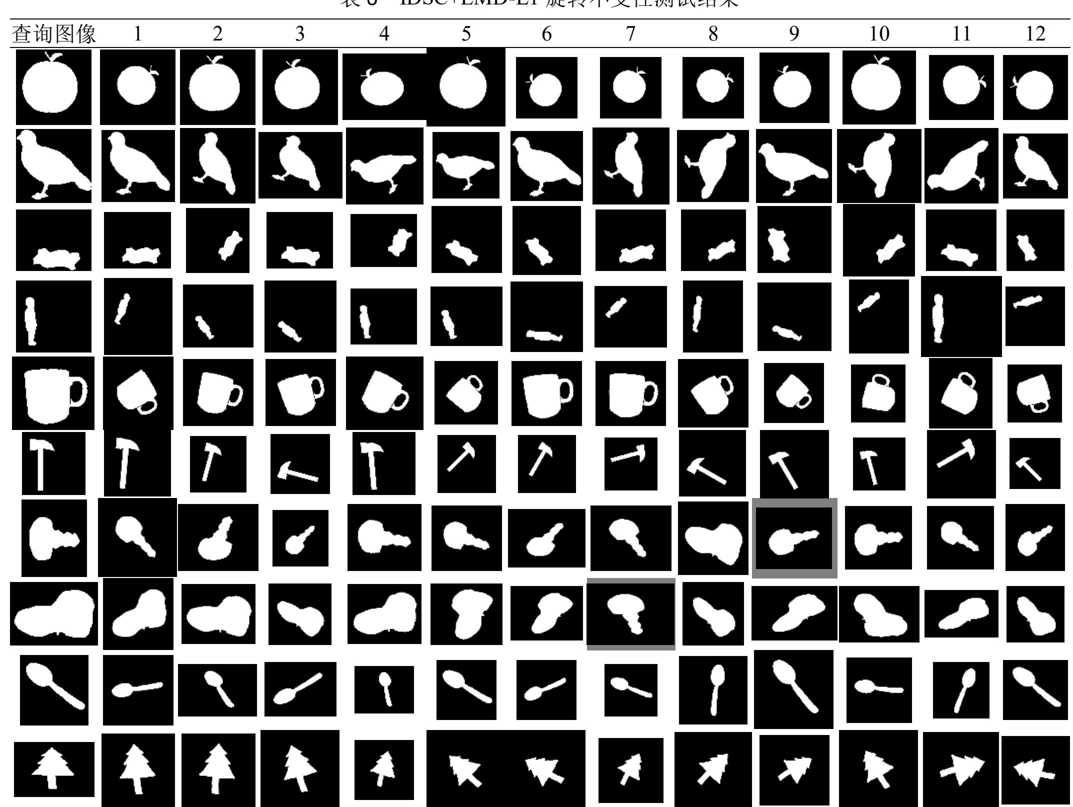
表 5　各算法检索性能比较

方法	检索精度(Bullseye)
CSS[18]	75.44%
Visual Parts[17]	76.45%
SC+TPS(χ^2)[9]	76.51%
Curve Edit[19]	78.17%
Distance Set[20]	78.38%
Gen.Model[21]	80.03%
IDSC(χ^2)	85.40%
IDSC+EMD-L1	**86.56%**

6　旋转不变性测试

为了验证 IDSC+EMD-L1 的旋转不变性。本次实验从 MPEG-7 数据集中随机选取 10 幅图像作为基准图像，然后将这每一幅图像幅分别沿着顺时针和逆时针方向依次旋转 5°，15°，30°，45°，60°，75° 得到 12 幅新的图像。包括 10 幅基准图像，整个旋转数据集有 130 幅图像。表 6 列出了将 10 基准幅图像作为查询图像的检索结果，若有检索错误的图像将其表格背景颜色设置为灰色。从表 6 可以看出检索返回结果只有两幅图像检索错误，其余 118 图像检索正确，说明改进后的算法仍然保持良好的旋转不变性。

表 6　IDSC+EMD-L1 旋转不变性测试结果



7 算法运算速度测试

本实验采用两组算法进行对比。第一组实验：CPDH+EMD-L1，CPDH+EMD，SC；第二组实验：IDSC+DP，IDSC+EMD-L1，SC。采用的数据集是 MNIST[22]手写数字图像库的训练图像库，共有 10000 幅图像，包含 0 到 9 共 10 种数字。从中随机选取 1000 幅进行实验(数字形状复杂度从低到高，由此计算出的识别速度更具有一般性)。实验结果如图 6、7 所示。实验证明改进后算法的运行时间显著优于原算法与 SC，更适合于工程应用。

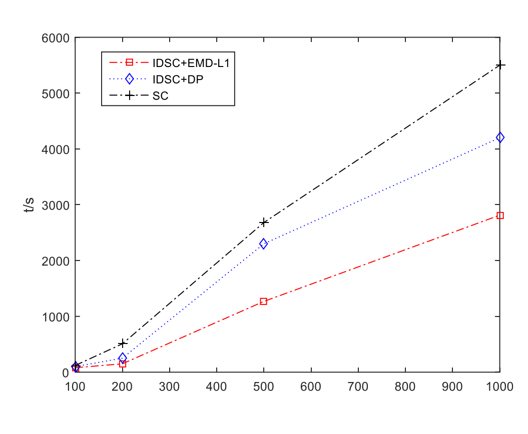


图 6 第一组算法时间测试

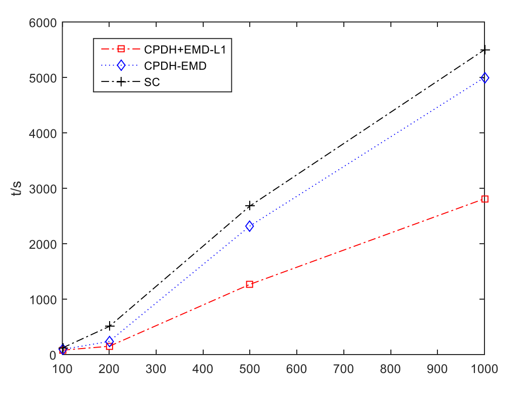


图 7 第二组算法时间测试

8 结束语

本文基于 CPDH 和 IDSC 分别用 EMD-L_1 替换 EMD 和 DP 算法作为轮廓点直方图的度量准则，其主要优点在于 L_1 范数（曼哈顿距离）对于形变有较好的鲁棒性，而且通过减少目标函数的变量数降低了算法的计算复杂度。从实验结果来看，所改进算法有良好的检索能力，加快了形状匹配速度。由于最近几年深度学习大热，以神经网络为基础做 3D 形状检索将是作者下一步研究的方向。

参考文献：

[1] Zhang D, Lu G. Review of shape representation and description techniques [J]. Pattern Recognition, 2004, 37 (1): 1-19.

[2] Yang M, Kpalma K, Ronsin J. A survey of shape feature extraction techniques [J]. DOI: 10. 5772//6237, 2008.

[3] Bai S, Bai X, Zhou Z, et al. Gift: A real-time and scalable 3d shape search engine [C]// Proc of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. 2016: 5023-5032.

[4] Zhu Z, Wang X, Bai S, et al. Deep learning representation using autoencoder for 3D shape retrieval [J]. Neurocomputing, 2016, 204: 41-50.

[5] 周瑜，刘俊涛，白翔. 形状匹配方法研究与展望 [J]. 自动化学报, 2012, 38 (6): 889-910.

[6] Alajlan N, EI Rube, Kamelb M S, Freeman G H. Shape retrieval using triangle-area representation and dynamic space warping, [J] Pattern Recognition 2007 40 (7) 1911-1920.

[7] Adamek T, O'Connor N E. A multiscale representation method for nonrigid shapes with a single closed contour [J]. IEEE Trans on Circuits and Systems for Video Technology, 2004, 14 (5): 742-753.

[8] Hong B W, Soatto S. Shape Matching using Multiscale Integral Invariants [J]. IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2015, 37 (1): 151-160.

[9] Belongie S, Malik J, Puzicha J. Shape matching and object recognition using shape contexts [J]. IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2002, 24 (4): 509-522.

[10] Ling H, Jacobs D W. Shape classification using the inner-distance [J]. IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2007, 29 (2): 286-99.

[11] Shu Xin, Wu Xiaojun. A novel contour descriptor for 2D shape matching and its application to image retrieval [J]. Image and Vision Computing, 2011, 29 (4): 286-294.

[12] Ling, Haibin, and Kazunori Okada. An efficient earth mover's distance algorithm for robust histogram comparison. IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2007, 29 (5): 840-853.

[13] Yossi R, Guibas L J, Tomasi C. The earth mover's distance multi-dimensional scaling and color-based image retrieval [C]// Proc. of ARPA Image Understanding Workshop. 1997: 661-668

[14] Sharvit D, Chan J, Tek H, et al. Symmetry-based indexing of image databases [C]// Proc of IEEE Workshop on Content-Based Access of Image and Video Libraries. 1998: 56-62.

[15] Sebastian T B, Klein P N, Kimia B B. Recognition of shapes by editing their shock graphs [J]. IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2004, 26 (5): 550-571.

[16] Attalla E, Siy P. Robust shape similarity retrieval based on contour segmentation polygonal multiresolution and elastic matching [J]. Pattern Recognition, 2005, 38 (12): 2229-2241.

[17] Latecki L J, Lakamper R, Eckhardt T. Shape descriptors for non-rigid shapes with a single closed contour [C]// Proc of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. 2000: 424-429

[18] Mokhtarian F, Abbasi S, Kittler J. Robust and efficient shape indexing

through curvature scale space [C]// Proc of British Machine and Vision Conference. 1996, 96: 53-62

[19] Sebastian T B, Klein P N, Kimia B B. On aligning curves [J]. IEEE Trans on pattern analysis and machine intelligence, 2003, 25 (1): 116-125.

[20] Grigorescu C, Petkov N. Distance sets for shape filters and shape recognition [J]. IEEE Trans on Image Processing, 2003, 12 (10): 1274-1286.

[21] Tu Zhuowen, Yuille A L. Shape matching and recognition–using generative models and informative features [C]// Proc of European Conference on Computer Vision. Berlin: Springer, 2004: 195-209.

[22] Deng Li. The MNIST database of handwrittendigit images for machine learning research [best of the web] [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2012, 29 (6): 141-142